第 48 卷 第 6 期
2019 年 11 月
内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版）
Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)
Vol.48 No.6
Nov. 2019

杨乐在函数值分布论上的贡献

王　元[1]，乔建永[2]，杨　静[3]

（1.中国科学院 数学与系统科学研究院，北京 100190；
2. 北京邮电大学，北京 100876；3. 北京联合大学，北京 100101）

摘　要：杨乐院士是我国一位世界知名的数学家，在函数值分布理论方面做出了杰出的成就，得到国内外学者的高度评价和广泛引用.同时，他也为中国数学的发展做了大量工作.杨乐院士对我国现代数学的发展具有重要影响.通过介绍杨乐院士的生平，介绍他的学术成就和影响，概述他对中国数学发展所做的贡献.

关键词：杨乐；函数论；值分布论；贡献；数学
中图分类号：O 174　　文献标志码：A　　文章编号：1001－8735(2019)06－0471－08
doi:10.3969/j.issn.1001－8735.2019.06.001

杨乐，1939 年 11 月生于江苏南通.1950－1956 年在江苏省南通中学读书.他在读初二时，新设的代数课中，用字母表示数，并可与数字一起作四则运算，算术中各种类型较复杂的应用题，均可用解方程简单和统一的方法给予解答；开设的平面几何课中出现了平面图形以及严谨的逻辑推理，所有这些都引起了杨乐的极大兴趣.通过课余大量阅读，养成独立学习与思考的习惯，并决心一生从事数学研究.1956 年春，中央号召“向科学进军”时，受到共青团南通市委与学校的表彰.本文主要介绍杨乐在数学方面的工作，取得的成就及影响.

1　大学和研究生阶段

1956 年秋季，不满 17 岁的杨乐，考入北京大学数学力学系.他学习勤奋，成绩十分突出.1962 年六年制本科毕业后，考入中国科学院数学研究所，成为熊庆来的研究生.

1956 年至 1966 年的十年学习，为杨乐打下了宽厚与扎实的基础.他有很强的钻研精神，独立思考，认真探索；同时注意不断动手，论证与运算，阅读大量参考书籍.对一些经典论著与有关文献，他将厘清其逻辑推理、演算与论证作为初步要求，同时把重点放在领会其原始思想，掌握精神实质上.在熊庆来的指导下，杨乐在讨论班上报告了 R.Nevanlinna 和 G.Valiron 的两本经典著作:《毕卡－波莱尔定理与亚纯函数理论》[1]《亚纯函数的波莱尔方向》[2]，迅速走向函数值分布论的研究前沿.

1962 年 12 月，杨乐入学刚三个月，就写出论文“亚纯函数及函数组合的重值”[3]，获得了精密和深刻的结果，发表在 1964 年第二季度的《数学学报》上.之后，他又扩充研究领域，查阅了国际上数以百计的论文，精读其中重要的以及当时最新的文献.1964 年，杨乐与张广厚对平面区域内的全纯函数族做了出色的研究，获得了新的正规定则，发表在次年的《中国科学》上[4].1969 年，D.Drasin 在《Acta Math》的文章[5]指出，杨、张的定理解决了 W.K.Hayman 提出的一个问题.直到 1975 年秋，杨乐通过亲属的联系，获得 Hayman 报告的复制件，才获知原来的问题[6].

2　1966－1976 年间的研究工作

研究生期间，杨乐发表了五篇论文，其中四篇刊印在当时反映中国学者最高学术水平的期刊《中国科学》

收稿日期：2019-10-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11101034)
作者简介：王　元(1930－)，男，江苏镇江人，中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，主要从事数论、数理统计、近现代数学史研究
通讯作者：杨　静(1977－)，女，河北安新人，北京联合大学副教授，主要从事近现代数学史研究，E-mail:yangjing@buu.edu.cn.

上.1966 年后我国的科学研究发展缓慢,直至 1971 年,中国科学院的科研氛围才稍有改善,杨乐尽一切可能挤时间,研读国外的重要进展与文献.此时合作者张广厚患了较严重的眼疾,医生警告他可能视网膜脱落,导致失明.张广厚因思想负担严重,1971 年至 1976 年期间,基本上不使用目力阅读文献与书写文章,这些任务均由杨乐承担.利用在研究生阶段打下的功底和培养的研究能力,排除困难,刻苦钻研,终于在函数值分布论领域获得国内外学者瞩目的成就.

1976 年 5 月,美国纯粹与应用数学代表团来我国访问,历时三周半,中科院数学所、北京大学、复旦大学等单位向代表团作了六十多个报告.在杨乐报告后,团长 S.MacLane 与伍鸿熙等由衷地予以赞扬,指出杨乐和张广厚的成果是国际上该领域的最佳成果之一.返美后,代表团公开出版了访华报告[7,8],完整叙述了杨乐与张广厚的两条定理,称它们既新颖又深刻,与哥德巴赫猜想的研究工作并列,称为中国纯粹数学的第一流工作.20 世纪 70 年代中期,英国函数论专家 A.C.Offord 与 W.K.Hayman 先后访华时,也对杨、张的成果高度赞赏,并邀请他们赴欧洲访问交流.1980 年春,在杨乐与张广厚访美之际,普渡大学举行了国际函数论会议,该校教授 D.Drasin 与 A.Weitsman 在筹备会议的报告里指出:杨乐、张广厚在北京领导着一个成果丰硕、欣欣向荣的学派.美国数学家 W.H.J.Fuchs 评价杨、张的成果是亚纯函数辐角分布论中重要的现代贡献,是先驱性的工作,并称之为“杨、张理论”[9].

3 杨乐研究工作的影响

杨乐的研究工作为国内外同行学者广泛引用.《俄国大百科全书》复分析卷中的主要文章“整函数与亚纯函数”的作者 A.A.Goldberg、B.Ya.Levin 与 I.V.Ostrovskii[10]引用了杨乐的九篇论文,完整叙述了他的七项研究成果.Goldberg 等写道:杨乐与张广厚完全刻画了亚纯函数的全体波莱尔方向构成的集合,然后叙述了杨、张关于波莱尔方向分布的定理.接着 Goldberg 等又写道:杨、张发现了亚纯函数的亏值数目与波莱尔方向数目间的一个有趣的关系,然后完整地叙述了杨、张相应的结果.这在俄国学者撰写的百科全书中是比较罕见的.

1994 年,A.A.Goldberg[11]用构造性的方法证明了杨乐[3]引进的涉及重值的亏量关系的精密性,称其为“杨乐亏量关系”.Springer-Verlag 出版社在其出版的大学和研究生教科书里,J.L.Schiff 有一册《正规族》,引用了杨乐八篇论文,并称为中国学派,在正文内有十余处引述,其中一处用了七页的篇幅引用了杨乐一篇论文的主要部分.

改革开放以来,杨乐曾应邀到美、苏、德、英、日、瑞士、瑞典、芬兰、以色列等十余个国家约六十所大学作学术演讲,先后在康奈尔大学、普渡大学、瑞典皇家科学院、普林斯顿高等研究院、哈佛大学和圣母大学做过一学期或一学年的访问教授,应邀在约二十次国际学术会议上作主要或邀请演讲,广受欢迎和赞誉.1978 年 4 月,杨乐和张广厚出席苏黎世国际复分析会议,并作学术演讲,这是我国学者在 1966 年后第一次以个人身份赴国外参加学术活动.他们的演讲获得 R.Nevanlinna,L.Ahlfors,W.K.Hayman 等的高度评价.1987 年在伦敦举行的一百余位高水平学者参加的函数论会议,杨乐被推举为第一次大会主席.杨乐的论文与专著为国内外同行学者广泛引用,并发展他的方法,推广其定理.1984 年,W.K.Hayman 等在《伦敦数学会会报》(*Bulletin of London Mathematical Society*)上列举复分析中的研究问题时,第一个问题就是 D.Drasin 提出要推广 1982 年杨乐的一个定理[12].

20 世纪 70 年代末,中国数学会恢复活动,举行大会.杨乐应邀出席,并在大会做主要学术报告,当选为常务理事.杨乐曾多次参与商谈中国数学会加入国际数学联盟事宜.1985 年,杨乐以中国数学会秘书长的身份主持筹备了学会五十周年的大型学术会议,在大会上作学术报告.20 世纪 80 年代后期,数学会换届,杨乐提出学会领导任期及年轻化的具体建议,获得广泛认同,写入会章,并沿用至今.1993 年 4 月,丘成桐提出在我国举办国际数学家大会的倡议,当时担任数学会理事长的杨乐,撰写报告,直接呈送主管科教的李岚清副总理,获得大力支持,原则上解决了东道国必须准备 100 万美元的会议经费问题.

4 杨乐在中国数学会、数学所从事的学术交流

1994 年,杨乐在瑞士 Luzern 举行的国际数学联盟(IMU)的各国代表会议上发言,明确我国申办国际数

学家代表大会(ICM)的意愿，并对中国数学的发展与办会的有利条件作了扼要说明，为申办成功打下了基础.1995 年，中国数学会成立六十周年，举行庆祝大会，杨乐作为数学会理事长，主持了筹备工作，撰写大会主题报告，总结了改革开放后我国数学的发展.

20 世纪 80 年代初期，国际上关于复动力系统的研究开始趋热时，杨乐立即注意到这个动向，在国内复分析的研究生与学者中作学术报告进行介绍，引导他们从事研究，推动了复动力系统在我国的发展.

杨乐关于值分布论的研究，以及国际上的新进展，曾被总结在其专著《值分布论及其新研究》(1982，科学出版社)与《值分布理论》[13](*Value Distribution Theory*，1993，Springer-Verlag)中，被称为这方面的权威文献.在改革开放之初，杨乐和张广厚的研究工作获得了全国科学大会奖(1978)、国家自然科学二等奖(1982).之后，杨乐还获得“何梁何利科技进步奖”“华罗庚数学奖”“陈嘉庚数理科学奖”“国家科技进步奖”“陈省身数学奖”“国家图书奖”等.

由于学术上的突出成果，1980 年杨乐被选为中国科学院学部委员(院士)，1987 年至 1994 年期间担任数学研究所所长，1992 年至 1995 年当选为中国数学会理事长，1998 年至 2002 年在中科院知识创新工程中，中科院四个数学类的研究所整合为研究院，他被任命为首任院长，2003 年至 2017 年为研究院学术委员会主任.他曾经担任的学术兼职主要有：国务院学位委员会委员与数学评议组召集人，国家科技奖励委员会委员与自然科学奖评审委员会委员，中科院主席团委员，中科院数理学部常委与副主任，中国科协常委与荣誉委员等.

杨乐在担任科研组织工作及社会活动方面也显示出卓越的才能.20 世纪 80 年代中期，杨乐与王元共同提议将数学所办成开放型的研究所，获得周光召副院长的大力支持.1985 年起，数学所进一步加强国际交流，接待来自国内各大学的访问学者，帮助他们掌握科研动态，明确研究方向，学术水平有了较大提高.同时数学所坚持以基础数学为主，关注人才培养，注重研究水平，促进学术交流.

1996 年，中科院与香港晨兴基金会合作，共同创建了中科院晨兴数学中心，聘任丘成桐与杨乐主持工作.逾二十年来，每年晨兴中心遴选若干意义重大、富有发展前景的专题，邀请国内外在该专题上研究活跃的青年学者到晨兴中心从事研究，进行交流.此外，还邀请国外对口专家作系列演讲，介绍动态，使国内许多年轻学子的科研水平有较大提高，一些领域和研究方向取得明显进展.原本国内在算术、代数、几何方面基本处于空白状态，现在有了本质提升，获得出色的成果.这是晨兴工作的一个突出事例.

杨乐十分关注青年数学人才的培养与成长.他谆谆教导大学生与研究生要有远大的理想与抱负，要对专业领域有浓厚兴趣，学到真正的本领，长期努力，成为高水平的创新型人才，为祖国科学发展做出贡献.他希望研究生不要急于进入专门领域，而是要打下较广博的基础.他要求研究生与博士后切勿追求论文数量，不要仅仅作一些推广与枝节上的改进，而是选择意义重大的课题，从关键处与实质上取得突破，应有重要创新.

5　亏值和波莱尔方向的概念

在介绍杨乐的研究工作之前，先引进函数值分布论中的几个基本概念[1,13-15].

设 $f(z)$ 为开平面亚纯的函数.R.Nevanlinna 引进了 $f(z)$ 的特征函数：

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f),$$

其中 $m(r,f)$ 为平均值函数，定义为

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi,$$

$N(r,f)$ 为计数函数(或密指量)，由

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{d}t+n(0,f)\log r$$

确定，这里 $n(t,f)$ 表示在圆 $|z|\leqslant t$ 上 $f(z)$ 的极点数，重级极点须按其重数计算，$n(0,f)$ 则表示 $f(z)$ 在原点的极点重数(若原点并非 $f(z)$ 的极点，则 $n(0,f)=0$.)

这时，$f(z)$ 的上级 λ 与下级 μ 定义为

$$\lambda=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r},\quad \mu=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r}.$$

若 $f(z)$ 在开平面超越亚纯,a 为一任意复数,则 $f(z)$ 对于复数 a 的亏量定义为

$$\delta(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,1/(f-a))}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,1/(f-a))}{T(r,f)}.$$

易于看出 $0\leqslant\delta(a,f)\leqslant 1$.当 $\delta(a,f)>0$ 时,则称复数 a 是 $f(z)$ 的一个亏值.

R.Nevanlinna 在引进亚纯函数的特征函数与亏值后,基于其基本定理,获得了极其重要的亏量关系,即:

若函数 $f(z)$ 于开平面超越亚纯,则其亏值至多是可数的,且

$$\sum\delta(a,f)\leqslant 2.$$

通常的 Picard-Borel 定理便是亏量关系的一个简单推论.

Nevanlinna 理论还常常用于寻求新的正规定则.对于平面区域 D 内一族全纯或亚纯函数,当其适合某些条件时,可以先对其应用基本定理.倘若能找到途径,对余项中出现的原始值消去或予以上界的估计,则常能证明相应的正规定则[13].

G.Valiron 基于 Borel 定理,引进了 Borel 方向的概念[2].若 $f(z)$ 于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数,一条方向 $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 称为 $f(z)$ 的 Borel 方向,若对于任意复数 a(可以是无穷),任意的正数 ε,均有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)}{\log r}=\lambda,$$

至多除去关于复数 a 的两个例外值.这里 $n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)$ 表示在区域$(|z|\leqslant r)\cap(|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon)$上 $f(z)-a$ 的零点数,重级零点须计算其重数.

Valiron 应用 Nevanlinna 基本定理和复杂的分析技巧,证明了一个深刻的事实:若 $f(z)$ 于开平面亚纯,且级为有穷正数,则它至少存在一条 Borel 方向[2].

同时,Valiron 提出是否 $f(z)$ 与其各阶导函数 $f^{(k)}(z)(k=1,2,\cdots)$ 至少存在一条公共的 Borel 方向?

6 杨乐与张广厚的两项杰出研究

杨乐和张广厚从研究生阶段便开始有合作的研究成果,其中最突出的成果是:

定理 1[16] 设 $f(z)$于开平面亚纯,级 λ 为有穷正数.若记 $f(z)$的亏值数为 p,$f(z)$的 Borel 方向数记为 q,则 $p\leqslant q$.

自从 Nevanlinna 建立了其基本定理以后,亏值便成了模分布论的中心概念,关于亏值数目的研究成为一项重要课题.例如,A. Pfluger, G. Valiron, A. A. Goldberg, A. Edrei, W. H. J. Fuchs, A. U. Arakelyan, A.Weitsman等均从不同的视角予以研究.另一方面,G.Valiron 与一些学者又用深入与细致的分析工具,围绕辐角分布论的基本概念—Borel 方向进行研讨.关于亏值与 Borel 方向,各自都有大量研究成果,但是均未意识到两者之间存在着十分紧密的联系.

从定义可以看出,亏值与 Borel 方向是两个极不相同的概念.亏值依赖于函数在整个平面上的情况,说明函数取该值较为"亏损",以及函数在该值附近变化较为缓慢.而 Borel 方向仅取决于函数在该方向附近局部的性态,在该邻域内函数取几乎所有复数的值点极其稠密,函数变化十分剧烈.杨乐与张广厚的研究第一次揭示了这两个看似完全不同的基本概念间的密切联系.

他们还证明了:

定理 1′[16] 任意给定一正整数 n,必存在有穷正级的亚纯函数 $f(z)$,$f(z)$ 的亏值数以及 Borel 方向数恰好都等于 n.即定理 1 中获得的估计 $p\leqslant q$ 是最佳的.

对于整函数,他们还进一步获得:

定理 2[13] 设 $f(z)$ 是有穷正级 λ 的整函数.若记 p 为 $f(z)$ 的有穷亏值数,q 为 $f(z)$ 的 Borel 方向数,则 $p\leqslant\min\{\frac{q}{2},2\lambda\}$.

关于亚纯函数 Borel 方向的分布,在 20 世纪 70 年代中期也获得了下述完美的结果:

定理 3[17] 若 λ 是一任意给定的正数,集合 E 是一非空、闭的实数集$(\bmod 2\pi)$,则必存在开平面上的亚纯函数 $f(z)$,以 λ 为其级,并且 $f(z)$ 的 Borel 方向恰为集合$\{\arg z=\theta,\theta\in E\}$.

根据 Borel 方向的定义和 G.Valiron 关于亚纯函数 Borel 方向的存在性，不难看出 $f(z)$ 的 Borel 方向的辐角值一定是非空的、闭的实数集.定理 3 指出，这也是其充分条件.

1976 年，杨乐和张广厚发表定理 3 的论文时，D.Drasin 与 A.Weitsman 关于整函数 Borel 方向的分布得到一个类似结果[18].但 Drasin 与 Weitsman 在整函数时，对 Borel 方向分布的描述不如上述定理 3 简洁完美，使用的方法也截然不同，不像杨乐和张广厚证明的那样直接且完全是构造性的.

7　拟亏量关系与亏函数

设函数 $f(z)$ 于开平面亚纯，k 为一正整数.若 a 为任意复数，$N_{k)}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f(z)-a$ 且重级不超过 k 的零点的计数函数（即密指量），定义：

$$\delta_{k)}(a,f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_{k)}(r,1/(f-a))}{T(r,f)}.$$

容易看出，$0\leqslant\delta(a,f)\leqslant\delta_{k+1)}(a,f)\leqslant\delta_{k)}(a,f)\leqslant 1$.当 $\delta_{k)}(a,f)$ 大于 0 时，则 a 被称为 $f(z)$ 的一个拟亏值，$\delta_{k)}(a,f)$ 则称为拟亏量.杨乐在 20 世纪 60 年代证明了

定理 4[3]　设 $f(z)$ 于开平面亚纯，k 为一正整数，则 $f(z)$ 的拟亏值至多是可数的，且全体拟亏量总和不超过 $2+\frac{2}{k}$.即

$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta_{k)}(a,f)\leqslant 2+\frac{2}{k}. \tag{1}$$

当 $k=1$ 时，杨乐指出椭圆函数就使上述定理中的上界 4 达到.当 k 趋于无穷时，则拟亏量趋向于 Nevanlinna 定义的亏量，定理的结论即成为经典的亏量关系.

定理 5[3]　当 $f(z)$ 为整函数时，相应地有

$$\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta_{k)}(a,f)\leqslant 1+\frac{1}{k}. \tag{2}$$

1994 年，A.A.Goldberg[11] 继续研究了杨乐定义下的拟亏值与拟亏量关系，用构造具体函数的方法，证明了对任意正整数 k，拟亏量关系中的上界是精确的.即

定理 Go[11]　若 k 为一正整数，则存在于开平面亚纯的函数 $f(z)$，使(1) 式中等号成立.存在整函数 $f(z)$，使(2) 式等号成立.

设 $f(z)$ 于开平面超越亚纯，对于适合条件 $T(r,a(z))=o(T(r,f))$ 的亚纯函数 $a(z)$，杨乐首先定义了亏函数，并研究了下级为有穷的亚纯函数，其亏函数是否可数，以及相应的亏量总和是否有上界估计.

定理 6[19]　设 $f(z)$ 于开平面亚纯，下级 μ 有穷，则其亏函数至多是可数的，且相应于这些亏函数的亏量总和不超过 $\min\{[2\mu]+1,\max(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\mu\pi)\}$.即

$$\sum_{T(r,a(z))=o(T(r,f))}\delta(a(z),f)\leqslant\min\{[2\mu]+1,\max(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\mu\pi)\}.$$

定理 6 的证明，主要是建立了 $f(z)$ 关于亏函数的总展布关系.

杨乐引进的亏函数及其研究，在 20 世纪 80 年代引起了国际上函数论学者 G.Frank，N.Steinmetz 等的关注与后续工作，并为值分布论中持续长久的 Nevanlinna 猜想的最终解决奠定了基础.

8　关于正规定则的研究

杨乐对于全纯函数与亚纯函数的正规族理论也有许多研究工作，其中寻求正规定则是正规族理论的主要课题[4,20-22].

杨乐和张广厚在 1965 年的论文里就证明了

定理 7[4]　设 F 是平面区域 D 内的全纯函数族.若对族 F 中每个函数 $f(z)$ 和一整数 $n\geqslant 2$，在域 D 内恒有

$$f'(z)f(z)^n \neq 1,$$

则 F 在 D 内正规.

1966 年，他们又对亚纯函数族获得类似结果，但要求上述定理中的整数 $n \geqslant 5$. 在全纯函数的情形，1982 年，I.B.Oshkin 证明了 $n=1$ 时定理 4 依然成立. 对于亚纯函数族，顾永兴 1978 年证明了在 $n \geqslant 3$ 时上述定理依然成立. 1995 年，陈怀惠与方明亮、W.Bergweiler 与 A.Eremenko 分别将条件放宽到 $n \geqslant 1$.

W.K.Hayman 的一个重要猜想是相应于他建立的含导函数的基本不等式，正规定则应该成立[6]. 1979 年，顾永兴证实了这个猜想，但其方法有些特异[23]. 杨乐使用消去原始值的方法，证明了下面的结果.

定理 8[20] 若 k 是一正整数，$f(z)$ 为单位圆内的亚纯函数，且在单位圆内 $f(z) \neq 0$，$f^{(k)}(z) \neq 1$，则在 $|z| < \dfrac{1}{32}$ 内或者恒有 $|f(z)| < 1$，或者恒有 $|f(z)| > C_k$，其中 C_k 为仅依赖于 k 的正常数.

由此获得顾永兴的正规定则.

定理 Gu 设 k 为一正整数，a 和 $b(b \neq 0)$ 为两个有穷复数. 若 F 为区域 D 内一亚纯函数族，且对于族 F 中每个函数 $f(z)$，在 D 内恒有：$f(z) \neq a$ 与 $f^{(k)}(z) \neq b$，则 F 在 D 内正规.

杨乐还发现了亚纯函数的不动点与正规族之间的联系.

定理 9[22] 设 F 是平面区域 D 内的亚纯函数族，k 为一正整数. 若对族 F 中每个函数 $f(z)$，它及其 k 级导函数 $f^{(k)}(z)$ 在区域 D 内都没有不动点，则 F 在 D 内正规.

结合到复动力系统，杨乐提出以下问题：

问题[24] 设 k 为一正整数，D 为一平面区域，F 为一整函数族. 若对于 F 中每一函数 $f(z)$，它与其 k 级迭代 f^k 在域 D 内均无不动点，则 F 是否必在 D 内正规？

这里 $f^2 = f(f), \cdots, f^k = f^{k-1}(f), \cdots, k = 2,3,4,\cdots$.

M.Essen 和伍胜健[25] 对此作了研究，并回答了该问题.

9 辐角分布的新研究

20 世纪中期，关于 Borel 方向的研究，中心问题就是 Valiron 早期提出的：对于有穷正级亚纯函数 $f(z)$，是否它与其各级导函数至少存在一条公共的 Borel 方向？H.Milloux 用近百页的论证，在整函数的情况证实了论断的正确性. 之后，张广厚将 Milloux 的结论推广至亚纯函数，但以值无穷为 Borel 例外值的情况，并较大地简化了其证明，但他对原始值的处理仍然相当复杂.

杨乐完全区别于 Milloux 和张广厚的论证，用较为简单与直接的方法建立了一个基本定理，并由此立即得到一系列推论. 例如：

定理 10[13] 设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数. 若 $f(z)$ 以值无穷为其 Borel 例外值，则 $f(z)$ 与其各级导函数至少存在一条公共的 Borel 方向.

在对辐角分布作了深入研究后[26-30]，杨乐指出，相应于一个 Picard 型定理和对应的正规定则，常常存在对应的奇异方向. 从 W.K.Hayman 建立的包含导函数的基本不等式，Hayman 曾猜想对应的正规定则应该成立. 杨乐进一步预言应有与其对应的奇异方向.

定理 11[20] 设 $f(z)$ 于开平面亚纯. 若

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{(\log r)^3} = \infty, \tag{3}$$

则必存在一条方向 $\arg z = \theta_0 (0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$，具有下述性质：对于任意正数 ε，任意正整数 k，在角域 $|\arg z - \theta_0| < \varepsilon$ 内，或者 $f(z)$ 取每一有穷复数无穷多次，或者 $f^{(k)}(z)$ 取每一非零复数无穷多次.

上述定理中的条件(3) 似乎稍强了一些，D.Drasin 在 1984 年曾提出

问题[12] 定理 11 中的条件(3) 可否易为

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{(\log r)^2} = \infty\text{？}$$

当亚纯函数增长性较快，是有穷正级时，杨乐和张庆德进一步得到

定理 12[29]　若 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数，则必存在一条方向 $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，具有下述性质：对于任意正数 ε，任意正整数 k，与任意两个有穷复数 a 和 $b(b\neq 0)$，恒有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b)\}}{\log r}=\lambda.$$

由定理 12，杨乐和张庆德还得到下述结论，作为 Valiron 提出的重要问题的一个解答.

定理 13[29]　设 $f(z)$ 于开平面亚纯，级 λ 为有穷正数.若 $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 是 $f(z)$ 的一条 Borel 方向，且在角域 $|\arg z-\theta_0|<\varepsilon_0$（$\varepsilon_0$ 为一正数）内，$f(z)$ 有一个有穷的 Borel 例外值，则 $\arg z=\theta_0$ 是 $f(z)$ 与其各级导函数的公共 Borel 方向.

1930 年，英国数学家 J.Littlewood 曾考察角域内全纯函数的增长性与取值的问题，提出一个猜想，长期未曾解决.1979 年，杨乐与 W.K.Hayman 合作研究，论文于 1982 年在《伦敦数学会会刊》（*Proceedings of London Mathematical Society*）上发表，解决了 Littlewood 的猜想[31].

参考文献：

[1]　Nevanlinna R. Le theoreme de Picard-Borel et la theorie des fonctions meromorphes [M]. Paris：Gauthier Villars，1929.

[2]　Valiron G. Directions de Borel des fonctions méromorphes [M]. Paris：Mémor.Sci Math Fasc，1938.

[3]　Yang L. Multiple values of meromorphic functions and of their combinations [J]. Acta Math Sinica，1964，14：428-437.

[4]　Yang L，Zhang G H. Recherches sur la normalité des familles de fonctions analytiques *à* des valeurs multiples，Ⅰ.Un noveau critère et quelques applications [J]. Sci Sinica，1965，14：1258-1271；Ⅱ.Géneralisations [J]. Sci Sinica，1966，15：433-453.

[5]　Drasin D. Normal families and the Nevanlinna theory [J]. Acta Math，1969，122：231-263.

[6]　Hayman W K. Research problems in function theory [M]. London：Athlone Press，1967.

[7]　Feit W. A mathematical visit to China，May 1976 [J]. Notices Amer Math Soc，1977，24：110-113.

[8]　Fitzgerald A，MacLane S. Pure and applied mathematics in the People's Republic of China [M]. Washington D.C.：National Academy of Science，1977.

[9]　Fuchs W H J. Book review：Theory of entire and meromorphic functions—Deficient and asymptotic values and singular directions [J]. Bull Amer Math Soc，1994，30：319-326.

[10]　Goldberg A A，Levin L，Ostrovskii I V. Entire and meromorphic functions，Complex analysis [M]. Encyclopedia of Mathematical Sciences，1997.

[11]　Goldberg A A. Existence and some properties for which Yang Le deficiency relation reaches equality [J]. Math Stud，1994，3：53-60.

[12]　Barth K F，Branan D A，Hayman W K. Research problems in complex analysis [J]. Bull London Math Soc，1984，16：490-517.

[13]　Yang L. Value distribution theory [M]. Berlin：Springer-Verlag，1993.

[14]　Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford：Clarendon Press，1964.

[15]　Nevanlinna R. Analytic functions [M]. New York：Springer-Verlag，1970.

[16]　Yang L，Zhang G H. Recherches sur le nombre des valeurs deficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes [J]. Sci Sinica，1975，18：23-37.

[17]　Yang L，Zhang G H. Sur la construction des fonctions méromorphes ayant des directions singulières données [J]. Sci Sinica，1976，19：445-459.

[18]　Drasin D，Weitsman A. On the Julia directions and Borel directions of entire functions [J]. Proc London Math Soc，1976，32：199-212.

[19]　Yang L. Deficient functions of meromorphic functions [J]. Sci Sinica，1981，24：1179-1189.

[20]　Yang L. Meromorphic functions and their derivatives [J]. J London Math Soc，1982，25：288-296.

[21]　Yang L. Normal families and differential polynomials [J]. Sci Sinica，Series A，1983，26：673-686.

[22]　Yang L. Normal families and fix-points of meromorphic functions [J]. Indiana Univ Math J，1986，35：179-191.

[23]　Gu Y X. A criterion for normality of meromorphic functions [J]. Sci Sinica，special issue（Ⅰ），1979：267-274.

[24]　Yang L. Some recent results and problems in the theory of value distribution [C]// Proceedings of Symposium on Value

Distribution Theory in Several Complex Variables, 1992, Notre Dame University Press, 157-171.

[25] Essén M, Wu S J. Repulsive fix-points of entire functions with applications to complex dynamics [J]. J London Math. Soc, 2000, 62: 139-149.

[26] Yang L. Angular distribution and multiple values between entire functions and their derivatives [J]. Sci Sinica, 1980, 23: 16-39.

[27] Yang L, Drasin D, Weitsman A, et al. Deficient values of entire functions and their derivatives [J]. Pro Amer Math Soc, 1981, 82: 607-612.

[28] Yang L. Value distribution of meromorphic functions and their derivatives [J]. Sci Sinica, Series A, 1982, 25: 572-582.

[29] Yang L, Zhang Q D. New singular directions of meromorphic functions [J]. Sci Sinica, Series A, 1984, 27: 352-366.

[30] Yang L. Deficient values and angular distribution of entire functions [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 308: 583-601.

[31] Yang L, Hayman W K. Growth and values of functions regular in an angle [J]. Pro London Math Soc, 1982, 44: 193-214.

The Contributions of Lo Yang to the Value Distribution Theory

WANG Yuan[1], QIAO Jian-yong[2], YANG Jing[3]

(1. *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*;
2. *Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing* 100876, *China*;
3. *Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing* 100101, *China*)

Abstract: Professor Lo Yang, who was an academician of Chinese Academy of Science, is a world-famous mathematician of China. He made a lot of outstanding achievements in the value distribution theory of function theory, which are highly valued and widely cited by domestic and foreign scholars. Professor Yang also did a lot of work for the development of the Chinese mathematics and is regard as one of the mathematicians who made main influence on mathematics in modern China. This paper briefly introduces Professor Yang's life, mainly presents his academic achievements and influence and summarizes his contributions to the Chinese mathematics community.

Key words: Lo Yang; function theory; value distribution theory; contribution; mathematics

【责任编辑 刘凤祥】