第 14 卷 第 3 期　　数 学 学 报　　Vol. 14, No. 3
1964 年 5 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　May, 1964

亚純函数及函数組合的重值*

楊　乐
(中国科学院数学研究所)

在亚純函数值分布理論中，值点重級較高者往往影响十分微小．基于这种思想，伐利隆 (G. Valiron) 尝引入拟例外值的概念，并获得关于整函数的一些显著結果．其后，奈望利納 (R. Nevanlinna) 利用其第二基本定理，获得了关于亚純函数类似的結果．熊庆来对亚純函数的重值也作了研究，并注意到唯一性定理中重值所起的作用．

本文前一部分討論亚純函数的重值，获得較为精确与普遍的結果．

卡尔当 (H. Cartan) 曾推广奈望利納第二基本定理到函数組合的情况，本文后一部分討論函数組合的重值，获得了与亚純函数相应的結果．

作者衷心感謝导师熊庆来教授的热情指导以及对本稿的审閱．

I. 拟例外值

1. 我們考虑于开平面亚純的函数[1)] $f(x)$，命 $z_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 为 $q (q \geqslant 3)$ 个互为判别的复数，則奈望利納第二基本不等式可写为

$$(q-2)T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}(r, z_\nu) + S(r,f). \tag{1}$$

若 λ 为一正整数，以 $\overline{N}_{\lambda)}(r, z)$ 表 $f(x) = z$ 中重級至多为 λ 的值点精縮密指标，以 $\overline{N}_{(\lambda+1}(r, z)$ 表其余值点的精縮密指标．(1) 式即可写为

$$(q-2)T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{(\lambda+1}(r, z_\nu) + S(r,f).$$

注意到 $\overline{N}_{(\lambda+1}(r, z) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1} N_{(\lambda+1}(r, z)$，便有

$$\begin{aligned}(q-2)T(r,f) &< \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + \frac{1}{\lambda+1}\sum_{\nu=1}^{q} N_{(\lambda+1}(r, z_\nu) + S(r,f) \\ &\leqslant \frac{\lambda}{\lambda+1}\sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + \frac{1}{\lambda+1}\sum_{\nu=1}^{q} N(r, z_\nu) + S(r,f).\end{aligned}$$

于是得基本不等式

$$\{\lambda q - 2(\lambda+1)\}T(r,f) < \lambda \sum_{\nu=1}^{q} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + S_1(r,f) \tag{2}$$

其中

$$S_1(r,f) = O(\log(rT(r,f)))$$

---

* 1963 年 1 月 31 日收到．

1) 以下简称为亚純函数．

可能应除去一列总幅长为有限的例外区間。

对于有穷正級[1)]亚純函数 $f(x)$ 及某值 a，我們略去 $f(x)-a$ 的零点中重級高于 λ 者，余下的仅計一次，若在此約定下，a 仍为其波萊耳（Borel）意义下的例外值，則我們称 a 为 $f(x)$ 的 λ 級精簡拟例外值 B.

对任意正整数 λ，由（2）式可知：$f(x)$ 的 λ 級精簡拟例外值 B 不超过 $q-1$ 个，而 λ 与 q 应适合条件

$$q \geqslant 3, \quad \lambda q - 2(\lambda+1) > 0.$$

我們可取

$$q = E\left(\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}\right) + 1,$$

其中 $E(\alpha)$ 表不超过 α 的最大整数.

定理 1. 有穷正級亚純函数 $f(x)$ 的 λ 級精簡拟例外值 B 不超过 $E\left(\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}\right)$ 个. 特別地，$f(x)$ 的单級精簡拟例外值 B 不超过 4 个；二級精簡拟例外值 B 不超过 3 个；三級或三級以上的精簡拟例外值 B 不超过 2 个.

当 $\lambda = 3$ 时，定理 1 包含了奈望利納的两个結果[2].

当 λ 分别为 1 和 2 时，我們可以举例說明定理 1 中的囿界能够达到. 例如，$\lambda = 1$，考察函数

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

其中 k 是滿足条件 $0 < k < 1$ 的一个实数. 此函数将上半平面共形映照于矩形，其逆 $z = S(\zeta)$ 系椭圓函数，$S(\zeta)$ 有四个重值 ± 1, $\pm\frac{1}{k}$，这四个值便是它的单級精簡拟例外值 B.

2. 設 λ 和 μ 为任意两个正整数，則对整数 p $(0 < p < q)$ 不等式(1)可改写为

$$(q-2)T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{p} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + \sum_{\nu=1}^{p} \overline{N}_{(\lambda+1}(r, z_\nu)$$
$$+ \sum_{\nu=p+1}^{q} \overline{N}_{\mu)}(r, z_\nu) + \sum_{\nu=p+1}^{q} \overline{N}_{(\mu+1}(r, z_\nu) + S(r,f).$$

而得

$$\{q\mu(\lambda+1) - 2(\lambda+1)(\mu+1) - p(\mu-\lambda)\}T(r,f)$$
$$< \lambda(\mu+1)\sum_{\nu=1}^{p} \overline{N}_{\lambda)}(r, z_\nu) + \mu(\lambda+1)\sum_{\nu=p+1}^{q} \overline{N}_{\mu)}(r, z_\nu) + S_1(r,f). \quad (3)$$

若 $f(x)$ 有 p 个 λ 級精簡拟例外值 B，則除去这些值以外，对任意正整数 μ，由（3）式可知：$f(\lambda)$ 的 μ 級精簡拟例外值 B 不超过 $q-p-1$ 个，而 λ、μ、p、q 应适合

$$q \geqslant 3, \quad q\mu(\lambda+1) - 2(\lambda+1)(\mu+1) - p(\mu-\lambda) > 0.$$

我們在最有利的条件下取

---

1) 若 $f(x)$ 为无穷級亚純函数，利用熊庆来引进的級 $\rho(r)$ 的定义，可获类似結果，此处不再予以討論.

$$q = E\left(\frac{2(\lambda+1)(\mu+1)+p(\mu-\lambda)}{\mu(\lambda+1)}\right)+1.$$

定理 2. 若有穷正级亚純函数 $f(x)$ 有 p 个 λ 级精簡拟例外值 B，则除去这些值外，$f(x)$ 的 μ 級精簡拟例外值 B 数目不超过

$$E\left(\frac{2(\lambda+1)(\mu+1)+p(\mu-\lambda)}{\mu(\lambda+1)}\right)-p.$$

特別地，若 $f(x)$ 以某值为二級精簡拟例外值 B，則除此值外，其单級精簡拟例外值 B 不超过 2 个；若 $f(x)$ 以某值为三級精簡拟例外值 B，則除此值外，其二級精簡拟例外值 B 至多只有 1 个.

3. 若亚純函数 $f(x)$ 以某值 α 为极大亏量值，即 $\delta(\alpha)=1$（例如整函数即属此种情况），则类似于上述計算，我們相应地有

定理 1.' [1)] 若有穷正級亚純函数 $f(x)$ 适合条件 $\delta(\alpha)=1$，則除 α 外，它的 λ 級精簡拟例外值 B 不超过 $E\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)$ 个. 特別地，它的单級精簡拟例外值 B 数目不超过 2；二級或二級以上的精簡拟例外值 B 数目不超过 1.

定理 2.' 若有穷正級亚純函数 $f(x)$ 适合条件 $\delta(\alpha)=1$，并以 $\beta(\beta\neq\alpha)$ 为二級精簡拟例外值 B，則除去 α 和 β 以外，$f(x)$ 沒有单級精簡拟例外值 B.

4. 相应于奈望利納所定义的亏量，我們引入

$$\delta_\lambda(z)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}_{\lambda)}(r,z)}{T(r,f)}. \tag{4}$$

显然 $0\leqslant\delta_\lambda(z)\leqslant 1$.

若注意到对所有的复数 z，都有

$$\delta_\lambda(z)\leqslant 1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}_{\lambda)}(r,z)}{T(r,f)},$$

则由基本不等式 (2) 可导出

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta_\lambda(z_\nu)\leqslant\sum_{\nu=1}^{q}\left\{1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}_{\lambda)}(r,z_\nu)}{T(r,f)}\right\}\leqslant\frac{2(\lambda+1)}{\lambda},$$

其中 $z_\nu(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为一組互为判别的复数.

定理 3. 若 $f(x)$ 为一超越亚純函数，則由 (4) 式确定的 $\delta_\lambda(z)$，具有以下性質

(1) 对所有的 z，$0\leqslant\delta_\lambda(z)\leqslant 1$；

(2) $\delta_\lambda(z)$ 至多在一个可数集上取正值，并且

$$\sum\delta_\lambda(z)\leqslant\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}. \tag{5}$$

当 λ 分别为 1 和 2 时，我們可以举例，使(5)式右端的囿界能够达到. 例如 $\lambda=1$，仍考察上文所引用的椭圓函数 $S(\zeta)$，此时

$$\delta_1(1)=\delta_1(-1)=\delta_1\left(\frac{1}{k}\right)=\delta_1\left(-\frac{1}{k}\right)=1,$$

1) 定理 1′ 与定理 2′ 分別包含了伐利隆相应的結果[1].

因而

$$\sum \delta_1(z) = 4.$$

由于对任意的正整数 λ，都有 $\delta(z) \leqslant \delta_\lambda(z)$，所以由定理 3，立即有：$\delta(z)$ 至多在一个可数集上取正值，并且

$$\sum \delta(z) \leqslant \sum \delta_\lambda(z) \leqslant \frac{2(\lambda+1)}{\lambda}$$

对所有的 λ 成立。

令 $\lambda \to +\infty$，則得

$$\sum \delta(z) \leqslant 2.$$

5 上述全部討論可以类似地对于单位圓內的亚純函数进行。例如，单位圓內的亚純函数 $f(z)$，如果适合条件

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} = +\infty,$$

則

$$\sum \delta_\lambda(z) \leqslant \frac{2(\lambda+1)}{\lambda}$$

仍然成立。

反之，若 $\sum \delta_\lambda(z)$ 超过了某数 p，而 $p > \frac{2(\lambda+1)}{\lambda}$，則我們将有

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqslant \frac{6\frac{\lambda+1}{\lambda}}{p - \frac{2(\lambda+1)}{\lambda}}. \tag{6}$$

事实上，此时必可找到有限个复数 z_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, q)$，使

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta_\lambda(z_\nu) > p.$$

因而存在 r_0 $(0 < r_0 < 1)$，当 $r_0 < r < 1$ 时，有

$$qT(r,f) - \sum_{\nu=1}^{q} N_{\lambda)}(r, z_\nu) > pT(r,f).$$

另一方面，

$$\{q\lambda - 2(\lambda+1)\}T(r,f) < \lambda \sum_{\nu=1}^{q} N_{\lambda)}(r, z_\nu) + (\lambda+1)S(r,f).$$

联合上述二式，应用 R. Nevanlinna[2] 的推理，便得(6)式。

II. 唯一性定理

1. 若 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 为两个互不恆等的亚純函数，z_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 均为有穷复数，由(2)

$$\{\lambda q - 2(\lambda+1)\}(T(r,f_1) + T(r,f_2)) < \lambda \left\{\sum_{\nu=1}^{q} N_{\lambda)}^{1,2}(r, z_\nu) + \right.$$

$$+ 2\sum_{\nu=1}^{q} N_{\lambda)}^{0}(r, z_\nu)\Big\} + S_1(r, f_1) + S_1(r, f_2),$$

其中記号 $N_{\lambda)}^{1,2}(r, z)$, $N_{\lambda)}^{0}(r, z)$ 类似习用者.

所以

$$\{\lambda q - 2(\lambda + 1) - 2\lambda\}(T(r, f_1) + T(r, f_2)) < \lambda \sum_{\nu=1}^{q} N_{\lambda)}^{1,2}(r, z_\nu) + $$
$$+ O(\log(rT(r, f_1)T(r, f_2))), \tag{7}$$

可能应除去一列总幅长为有限的例外区間.

由 (7) 式,經过通常的推导,卽有

定理 4. 若 $f(x)$ 为一超越亚純函数,λ 为一正整数,則 $f(x)$ 由 $q = E\left(\frac{4\lambda + 2}{\lambda}\right) + 1$ 个值点集 $\bar{E}_{\lambda)}(z_\nu)(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 完全确定,其中 z_ν 为一組互为判別的复数[1)].

特別地,$f(x)$ 可由七个值点集 $\bar{E}_{1)}(z_\nu)(\nu = 1, 2, \cdots, 7)$ 或六个值点集 $\bar{E}_{2)}(z_\nu)(\nu = 1, 2, \cdots, 6)$ 或五个值点集 $\bar{E}_{3)}(z_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, 5)$ 完全确定.

注意本定理,值点集 $\bar{E}_{\lambda)}(z)$ 不仅舍去重級高于 λ 的值点,且余下的值点也只計算一次,所以它旣改善了熊庆来的一个結果[2)],同时又改善了奈望利納相应的結果.

对五个集的情况,还可予以精确化. 事实上,我們由类似的計算,有

$$T(r, f_1) + T(r, f_2) < 9\sum_{\nu=1}^{3} N_{3)}^{1,2}(r, z_\nu)$$
$$+ 8\sum_{\nu=4}^{5} N_{2)}^{1,2}(r, z_\nu) + O(\log(rT(r, f_1)T(r, f_2)))$$

可能应除去一列例外区間.

所以对任意超越亚純函数 $f(x)$ 及五个互为判別的复数 z_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, 5)$, $f(x)$ 可以由三个值点集 $\bar{E}_{3)}(z_\nu)(\nu = 1, 2, 3)$ 和两个值点集 $\bar{E}_{2)}(z_\nu)(\nu = 4, 5)$ 唯一确定.

2. 若 $f(x)$ 为一亚純函数, $a_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ 和 $b_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, q)$ 为两組有穷异于零的复数,且同組內互为判別,熊庆来[3]曾建立下列基本不等式

$$(p + q)T(r, f) < 2\bar{N}(r, f) + (q + 1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{\mu=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_\mu}\right)$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b_\nu}\right) - \left\{(q - 1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right.$$
$$\left. + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right\} + S(r, f). \tag{8}$$

設 $f(x)$ 适合条件

$$\delta(0) = 1, \quad \delta(\infty) = 1. \tag{9}$$

則 (8) 式可书为

---

1) 当 z_ν 中包含值 ∞ 时,須先作一适当的綫性分式变换.

2) 熊庆来教授在北京数学会 1962 年 1 月 29 日数学討論会上所作的报告,方法与此处所用的不同.

$$\{(p+q)-o(1)\}T(r,f) < \sum_{\mu=1}^{p} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a_\mu}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_\nu}\right) + S(r,f)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f-a_\mu}\right) + \sum_{\mu=1}^{p} \bar{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{f-a_\mu}\right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_\nu}\right) + S(r,f).$$

施行以上所用的化法并注意当 $f(x)$ 适合条件(9)时，

$$T(r, f^{(k)}) < (1+o(1))T(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right).$$

得

$$\{(p+q)-o(1)\}T(r,f) < \sum_{\mu=1}^{p} \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f-a_\mu}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_\nu}\right) + S_1(r,f).$$

若亚純函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均适合条件(9)，且 $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$，則有

$$\{(p+q)-o(1)\}(T(r,f_1)+T(r,f_2)) < \sum_{\mu=1}^{p} \{N_{1)}^{1,2}(r,a_\mu) + 2N_{1)}^{0}(r,a_\mu)\}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \{\hat{N}_{1)}^{1,2}(r,b_\nu) + 2\hat{N}_{1)}^{0}(r,b_\nu)\} + S_1(r,f_1) + S_1(r,f_2).$$

所以

$$\{(p+q)-4-o(1)\}(T(r,f_1)+T(r,f_2)) < \sum_{\mu=1}^{p} N_{1)}^{1,2}(r,a_\mu)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \hat{N}_{1)}^{1,2}(r,b_\nu) + O(\log(rT(r,f_1)T(r,f_2))) \tag{10}$$

可能应除去一列例外区間.

定理 5. 若亚純函数 $f(x)$ 适合条件(9)，則它由 $\bar{E}_{1)}(a_\mu)$ $(\mu = 1,2,3,4)$ 和 $\bar{E}_{1)}^{(k)}(b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ 中之任意五集确定. 其中 a_μ 和 b_ν 为两組有穷异于零的复値，且在同組内互为判別.

3. 若代替不等式(8)，而从熊庆来[3]所建立的另一不等式

$$qT(r,f) < \bar{N}(r,f) + qN\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{\nu=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_\nu}\right)$$

$$- (q-1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + S(r,f) \tag{11}$$

出发，仍設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 适合条件(9)，且互不恆等，則不难建立关系式

$$(q-2-o(1))(T(r,f_1)+T(r,f_2)) < \sum_{\nu=1}^{q} \hat{N}_{1)}^{1,2}(r,b_\nu)$$

$$+ O(\log(rT(r,f_1)T(r,f_2))), \tag{12}$$

其中 r 不位在例外区間上.

定理 6. 若亚純函数 $f(x)$ 适合条件(9)，則除去可能相差一个 $k-1$ 次多項式以外，它由 $\bar{E}_{1)}^{(k)}(b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ 完全确定，其中 b_ν 为三个有穷异于零且互为判別的复値.

III. 函数綫性組合的重值

1. 若 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_p(x)$ 为 p 个綫性无关的整函数,沒有公共零点.
設

$$F_i(x)=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}g_j(x),\ (i=1,2,\cdots,q)(q>p)$$

其中系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$ 均为常数,且适合条件

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 p} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_p 1} & a_{i_p 2} & \cdots & a_{i_p p} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

($i_1, i_2, \cdots, i_p$ 为 $1, 2, \cdots, q$ 中任意 p 个数的一个排列).

卡尔当[6]証明了

$$(q-p)T(r)<\sum_{i=1}^{q} N_{p-1}(r, F_i)+S(r)^{1)}. \tag{14}$$

設 λ 为一整数,且 $\lambda \geqslant p-1$. 以 $N_{p-1}^{\lambda)}(r, F)$ 表 F 零点密指标,其中零点按下述約定計算:若零点重級为 k,当 $k<p-1$ 时,計 k 次;当 $p-1 \leqslant k \leqslant \lambda$ 时,計 $p-1$ 次;当 $k>\lambda$ 时,略去不計. 类似地 $N_{p-1}^{(\lambda+1}(r, F)$ 意义自明.

因而,不等式(14)可化为

$$\begin{aligned}(q-p)T(r)&<\sum_{i=1}^{q} N_{p-1}^{\lambda)}(r, F_i)+\sum_{i=1}^{q} N_{p-1}^{(\lambda+1}(r, F_i)+S(r)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{q} N_{p-1}^{\lambda)}(r, F_i)+\frac{p-1}{\lambda+1}\sum_{i=1}^{q} N^{(\lambda+1}(r, F_i)+S(r)\\ &\leqslant \left(1-\frac{p-1}{\lambda+1}\right)\sum_{i=1}^{q} N_{p-1}^{\lambda)}(r, F_i)+\frac{p-1}{\lambda+1}\sum_{i=1}^{q} N(r, F_i)+S(r).\end{aligned}$$

但

$$N(r, F_i)<T(r)+O(1) \quad (i=1,2,\cdots,q),$$

所以

$$\{(\lambda-p+2)q-p(\lambda+1)\}T(r)<(\lambda-p+2)\sum_{i=1}^{q} N_{p-1}^{\lambda)}(r, F_i)+S_1(r). \tag{15}$$

我們称 F 为 λ **級精簡拟例外組合**,若它适合

$$N_{p-1}^{\lambda)}(r, F)=o\{T(r)\} \quad (r\to+\infty).$$

当 $\lambda(\lambda \geqslant p-1)$ 給定时,由不等式(15)可知:适合条件(13)的 λ 級精簡拟例外組合不能超过 $q-1$ 个,而 λ 与 q 必須滿足关系

$$q>p, \quad (\lambda-p+2)q-p(\lambda+1)>0.$$

可取

$$q=E\left(\frac{p(\lambda+1)}{\lambda-p+2}\right)+1.$$

---

1) 此处及以下采用卡尔当原来的記号,与前文稍异.

定理 7. 若 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_p(x)$ 为一組适合本节开始所述条件的整函数，則満足条件(13)的 λ 級精简拟例外組合总数至多为 $E\left(\dfrac{p(\lambda+1)}{\lambda-p+2}\right)$.

特别地，令 $p=2$，則本定理便化为定理 1.

2. 由不等式(15)，立得

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N_{p-1}^{\lambda)}(r, F_i)}{T(r)}\right\}\leqslant\frac{p(\lambda+1)}{\lambda-p+2}.$$

但

$$1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N_{p-1}(r, F)}{T(r)}\leqslant 1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N_{p-1}^{\lambda)}(r, F)}{T(r)},$$

因而对所有的 λ，都有

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N_{p-1}(r, F_i)}{T(r)}\right\}\leqslant\frac{p(\lambda+1)}{\lambda-p+2}.$$

令 $\lambda\to+\infty$，即得

$$\sum_{i=1}^{q}\delta(F_i)\leqslant p.$$

3. 卡尔当[6]关于唯一性的定理也可以相应地改善为

定理 8. 若 $g_i^j(x)(i, j=1, 2, \cdots, p)$ 为 p^2 个整函数，对每个 i，p 个函数 $g_i^j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ 綫性无关，并且 $g_i^j(x)$ 所組成的行列式不恆等于零．則必不存在 $2p+1$ 組常数 $a_j^k(j=1, 2, \cdots, p;\ k=1, 2, \cdots, 2p+1)$ 适合条件

$$\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_p^{i_1} \\ a_1^{i_2} & a_1^{i_2} & \cdots & a_p^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{i_p} & a_2^{i_p} & \cdots & a_p^{i_p} \end{vmatrix}\neq 0,$$

(其中 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 为 $1, 2, \cdots, 2p+1$ 中任意 p 数的一个排列) 使对每一个 k，p 个綫性組合

$$\sum_{j=1}^{p}a_j^k g_i^j(x)\quad(i=1, 2, \cdots, p)$$

按下述約定有相同的零点：零点重級高于 p^2-1 次者，全部略去；重級在 $p-1$ 与 p^2-1 之間者，仅計 $p-1$ 次；其余按原来重級計算.

事实上，当 i 固定时，对 p 个函数 $g_i^j(x)(j=1, 2, \cdots, p)$ 及其綫性組合 $F_i^k(x)= =\sum_{j=1}^{p}a_j^k g_i^j(x)$，$(k=1, 2, \cdots, 2p+1)$ 应用不等式(15)，其中取 $\lambda=p^2-1$, $q=2p+1$，則

$$(p^3-p^2+p+1)T_i(r)<(p^2-p+1)\sum_{k=1}^{2p+1}N_{p-1}^{p^2-1)}(r, F_i^k)+S_i(r).$$

設 $F^k(x)$ 为一整函数，它以 $F_i^k(x)$(k 固定，$i=1, 2, \cdots, p$) 的公共零点作为零点，且重級等于其最低者，沒有其他零点，則

$$(p^3-p^2+p+1)\sum_{i=1}^{p}T_i(r)<(p^2-p+1)p\sum_{k=1}^{2p+1}N_{p-1}^{(p^2-1)}(r,F^k)$$
$$+(p^2-p+1)\sum_{k=1}^{2p+1}\sum_{i=1}^{p}\{N_{p-1}^{(p^2-1)}(r,F_i^k)-N_{p-1}^{(p^2-1)}(r,F^k)\}+\sum_{i=1}^{p}S_i(r).$$

但卡尔当[6]曾証明

$$\sum_{k=1}^{2p+1}N_{p-1}(r,F^k)<\sum_{i=1}^{p}T_i(r)+O(1),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{p}T_i(r)<(p^2-p+1)\sum_{k=1}^{2p+1}\sum_{i=1}^{p}\{N_{p-1}^{(p^2-1)}(r,F_i^k)-N_{p-1}^{(p^2-1)}(r,F^k)\}+S(r).$$

注意 p^2-p+1 恆为正,便可推出定理之結論.

当 $p=2$ 时, $p^2-1=3$, 定理 8 为: 不存在两个互不恆等的亚純函数, 有五个相同的值点集 $\bar{E}_{3)}(z_\nu)$ $(\nu=1,2,3,4,5)$ 其中 z_ν 为一組互为判別的复数. 这就化为定理 4 的情况.

4. 最后, 我們指出应用关于函数值点重級的討論, 可使卡尔当[6]的一个結果更为精确.

定理 9. 設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是不退化为常数的整函数, 沒有零点, 且 $f_1(x)\not\equiv f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)\not\equiv 1$. 置

$$\widetilde{N}(r)=\sum_i \log^+\frac{r}{|\alpha_i|},$$
$$N'_{1)}(r)=\sum_j \log^+\frac{r}{|\beta_j|},\quad N''_{1)}(r)=\sum_k \log^+\frac{r}{|\gamma_k|},$$

α_i 表 $f_1(x)-1$ 和 $f_2(x)-1$ 的公共零点,計算次数等于其中較低的重級; β_j 表 $f_1(x)-1$ 的单級零点,且使 $f_2(x)-1$ 不为零者; γ_k 表 $f_2(x)-1$ 的单級零点, 且使 $f_1(x)-1$ 不为零者. 若是則

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\widetilde{N}(r)}{N'_{1)}(r)+N''_{1)}(r)}\leqslant 1$$

可能須除去一列总幅长为有限的例外区間.

証. 考虑整函数 $\varphi(x)$, 它以 $f_1(x)-1$ 和 $f_2(x)-1$ 的公共零点为零点, 且重級等于其中之較低者. 記 $T(r)$ 为三个綫性无关整函数 $f_1\frac{f_2-1}{\varphi}$, $f_2\frac{f_1-1}{\varphi}$, $\frac{f_1-1}{\varphi}$ 的特征函数,則卡尔当[6]已証得

$$N(r,\varphi)<N\left(r,\frac{f_1-1}{\varphi}\right)+N\left(r,\frac{f_2-1}{\varphi}\right)+O(\log r)+O(\log T(r))\qquad(16)$$

可能应除去一列总幅长为有限的例外区間 I.

由

$$N(r,f_1-1)=N\left(r,\frac{f_1-1}{\varphi}\right)+N(r,\varphi),$$
$$N_{1)}(r,f_1-1)=N'_{1)}(r)+N_{1)}(r)$$

可知

$$0 \leqslant N\left(r, \frac{f_1-1}{\varphi}\right) - N'_{1)}(r) \leqslant N(r, f_1-1) - N_{1)}(r, f_1-1).$$

但是

$$N(r, f_1-1) < m(r, f_1) + O(1),$$

$$m(r, f_1) < N_{1)}(r, f_1-1) + O(\log r) + O(\log m(r, f_1)),$$

(后一不等式的成立，可能須除去一列总幅长为有限的例外区間 I'.)故得

$$0 \leqslant N\left(r, \frac{f_1-1}{\varphi}\right) - N'_{1)}(r) < O(\log r) + O(\log m(r, f_1)) \quad (r \,\overline{\in}\, I'). \tag{17}$$

同样，

$$0 \leqslant N\left(r, \frac{f_2-1}{\varphi}\right) - N''_{1)}(r) < O(\log r) + O(\log m(r, f_2)) \quad (r \,\overline{\in}\, I''). \tag{18}$$

由(17),(18)两式及(16),并計及

$$T(r) < m(r, f_1) + m(r, f_2) + O(1),$$

$$m(r, f_i) < N_{1)}(r, f_i-1) + O(\log r) + O(\log m(r, f_i)) \quad (i = 1, 2),$$

卽得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\widetilde{N}(r)}{N'_{1)}(r) + N''_{1)}(r)} \leqslant 1 \quad (r \,\overline{\in}\, I, I', I'').$$

参　考　文　献

[1] Valiron G., Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, Edouard Privat. (1923).

[2] Nevanlinna R., Le théorème de picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Coll. Borel, Paris (1929).

[3] 熊庆来，亚純函数理論的一个基本不等式及其应用 (I)、(II)，数学学报，**8** (1958), 430—455.

[4] K. L. Hiong, Inégalités relatives à une fonction méromorphe et à l'une de ses primitives, Applications, *Journ. de Villat*, 9°, **41** (1962), 1—34.

[5] 熊庆来、何育贊，关于亚純函数及其紀数之重値，数学学报，**12** (1962), 144—155.

[6] Cartan H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomophes données, *Mathematica*, 1933, 5—31.