

数学概况及其发展*

数学，这门基础学科，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学技术、生产建设、以至日常生活所不可缺少的有力武器。在现代的科学技术中，如果不借助数学，不与数学发生关系，就不可能达到应有的精确度与可靠性。就科学来说，数学又是通向一切科学大门的钥匙，不仅所谓精确科学，如物理学、化学等已越来越需要较深较多的数学，甚至过去认为以描述为主，与数学关系不大的生物学、经济学等，也处于日益“数学化”的过程之中。这正象马克思早就指出过的那样，“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”。

数学研究的对象是现实世界中的数量关系与空间形式。数与形，这两个基本概念是整个数学的两大柱石。整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变与发展而发展着的。数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念而进行的。社会的不断发展，生产的不断提高，为数学提供了无穷源泉与新颖课题，促使数与形的概念不断深化，由此推动了数学的不断前进，在数学中形成了形形色色、多种多样的分支学科。这不仅使数学这一学科日益壮大，蔚为大成，而且使数学的应用也越来越广泛与深入了。

我们将以数与形这两个概念为中心对数学的概貌先作一简

* 本文摘自《现代科学技术简介》，科学出版社，1978年。

单描述。

一、数学是研究数与形的科学

大体说来，数学中研究数量关系或数的部分属于代数学的范畴。研究空间形式或形的部分，属于几何学的范畴。此外，数与形是有机联系而不是相互割裂的。远古时代，关于长度、面积、体积的量度，我国宋元时代出现的几何代数化，以及17世纪的解析几何，把形与数这两个概念沟通了起来（因而也把几何与代数这两者沟通了起来）。近代函数概念与微积分方法的出现，在数学中形成了系统研究形、数关系的分析学，成为近代数学中发展最迅速的部分。几何、代数、分析三大类数学，构成了整个数学的本体与核心。在这一核心周围，由于数学通过数与形这两个概念与其它领域的互相渗透而出现了许多边缘学科与交叉学科。这是整个数学王国的一个总的轮廓。

先从数说起

最简单最基本的也是从远古时起人类就不得不与之打交道的数，乃是正整数或自然数：

1, 2, 3, 4, 5, ...

在正整数之间有两种最简单的运算：加法与乘法。研究整数之间的联系与规律的学问叫做数论。从乘法产生了素数*的概念，例如 $6 (=2 \times 3)$ 是非素数，而7由于不能分解成两个比7更小的正整数的乘积而是素数（1不算素数）。正整数的一个基本性质是，它总可以表示成若干个素数的乘积，例如 $12 =$

* 对于大于1的整数来说，若除它本身与1之外再没有其它因子，则称此数为素数。

$2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $45 = 3^2 \times 5$ 等, 而且这种表示方法只有一种。素数

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

在整个正整数序列中的分布是极不规则的, 这个素数分布规律的探求产生了许多迄今没有解决的著名难题, 哥德巴赫 (Goldbach) 问题* 就是其中之一。这些难题反映了加法与乘法之间的矛盾, 用初等方法对这些问题是无能为力的。微积分发明以后, 数学家们开始用所谓解析方法来研究数论, 开创了解析数论这一学科。我国在哥德巴赫问题上的第一流成果, 就是用了解析方法而获得的。

19 世纪中, 数学家把整数概念大大扩大了。例如, 我们可以考虑所有形如 $a + b\sqrt{2}$ 的数, 其中 a 和 b 则是通常的整数 (正、负或零), 称这些为 $\sqrt{2}$ 域中的“整数”。它们也可以相加、相乘, 因之也可以定义“素数”。可以证明任一 $\sqrt{2}$ 域中的“整数”基本上只有一种方法把它表示成若干个“素数”的乘积。但如果考虑所有 $\sqrt{-5}$ 域中的“整数”, 即形如 $a + b\sqrt{-5}$ 的数, a 和 b 仍是通常的整数, 情形就大不相同了。例如, 21 与 9 就都有两种完全不同的方法表示成“素数”的乘积:

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5}),$$

$$9 = 3^2 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}).$$

数学家为了要克服这一困难, 创立了理想数或简称“理想”的理论, $\sqrt{2}$ 域与 $\sqrt{-5}$ 域也推广到了一般的代数数域, 这种域上

* 哥德巴赫提出一个论断: “任何一个大于 4 的偶数均可表示为两个素数之和”, 即“1+1”。我国数学家陈景润同志已证明了: “大偶数均可表示为一个素数加不超过两个素数的乘积”, 即“1+2”, 把这个论断的证明向前大大推进了一步。

整数的理论已发展成为一个当前很活跃的数学分支，叫代数数论，“理想”也已成为现代抽象代数学中最基本的概念之一。

数的概念是不断发展的，从整数出发，人们逐步引进了分数、小数、正负数、无理数等概念而形成了实数系统。由于解代数方程的需要，又引入了虚数、复数而构成了复数系统。这些实数（或复数）之间可以加、减、乘、除，且这些运算遵守通常所谓交换、结合、分配等等规律。数学家们把具有这些运算并满足这种规律的实数或复数全体，称为实数域或复数域。

随着数学的发展，人们又引进了与通常的数很不相同的量，但却具有与数相类似的运算。例如，在力学中力可表示成一个向量，两个力 F_1 、 F_2 的合力是 F_3 时，可以记作 $F_1 + F_2 = F_3$ ，而这种加法也遵守交换律与结合律。又如绕固定点 O 各作旋转 q_1 、 q_2 ，如果先作旋转 q_1 ，再作 q_2 所得是一绕 O 的旋转 q_3 ，而先作 q_2 ，次作 q_1 所得是绕点 O 的旋转 q_4 ，就记作 $q_1 q_2 = q_3$ 与 $q_2 q_1 = q_4$ 。一般说来， q_3 与 q_4 ，是不同的旋转。19 世纪时英国的数学力学家汉密尔顿把绕点 O 的旋转视作所谓“四元数”。在四元数间也可以相加、相乘，但其乘法不遵守交换律，即 $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ 。

正象旋转之被视为四元“数”那样，许多在数学中陆续出现带有某种运算的事物，如向量、张量、矩阵以至更抽象的元素，都不妨视之为某种广义的“数”。这些“数”都可以以“运算”为其特征。同时，数学家也把研究重点逐渐从“数”的本身性质转移到“数”与“数”间的运算上面。带有某种运算的“数”的集体统称为代数系统。依据运算规律的不同而有各种不同的代数系统，并具有种种各别的名称，例如群、环、域以及环上的模，与域上的代数，等等。

由于群、环、代数等代数系统在数学中的广泛出现，又由于各种理论与应用中出现的问题，最后往往归结为某种代数系

统的研究，代数系统的一般理论发展成了分支繁多（如群论、环论等）的代数类数学，或所谓近代抽象代数学，它已成为整个数学最基本的工具之一。

再 谈 谈 形

空间或几何形态是物质存在的躯体与外壳，人类首先注意到的物体的几何形态是大、小、方、圆，诸如长度、面积、体积、相似性等等，它们由于生产上的直接需要而首先从丰富的实践经验总结上升成为理论。在古代，我国与希腊形成了都以度量性为主但各有内容特色的不同几何体系。文艺复兴时期，绘画与建筑的实践经验，以及拿破仑时代军事上工程作图的需要，图形平直透视一类性质的研究，促成了另一种新的所谓投影几何学的出现。它的研究几乎贯串了整个 19 世纪。到了上一世纪晚期，另一类几何性质——空间的连续性与连通性——开始受到了重视，由于这些性质虽基本而隐晦，因而不易被发现与处理，只是由于科学的不断发展，许多数学问题都导致空间这类性质的研究，才在较近时期，即 19、20 世纪之交，形成了一门崭新的几何学分支——连续几何学或拓扑学。它的蓬勃发展乃是本世纪数学的一个特色。

几何研究的对象与方法也有很大的变化。例如，以光滑曲面为对象，通过引入弧线长度概念而建立了微分几何学。以后又推广到高维的光滑流形，并由于拓扑学的发展而开展了流形全局性或整体性的几何拓扑研究，引进了各种示性类与示性数。这些类与数已在最近被应用于磁单极与“基本”粒子等物理学的基本理论研究。又如，由于求解一般的多项式方程组，开展了由这种方程组的解答所构成的空间，即所谓代数簇的研究，形成了所谓代数几何学这一分支。解析几何的出发点是，引进了坐标来表示点的位置。同样，对任一代数簇也可以引进

坐标，这为代数几何的研究提供了一个有力的工具。除了研究光滑流形与代数簇这种特殊类型的空间（由于它们的特性得以应用发展较成熟的分析，即微积分方法与代数方法）的几何学以外，数学家又考虑了最一般的点的集体所构成的空间，研究它们的连续性质与度量性质，形成了所谓点集拓扑学与测度论这些分支学科。

数与形的联系

17 世纪是数学发展历史上一个划时代的新阶段的开始。这一时期，创立了解析几何，又出现了变量与函数的概念，把数学中的两大基本概念形与数紧密地联系在一起。所谓函数，即是定义在某些空间上的数量的分布。例如，在大气层中的压力、温度等等物理量的分布，即是定义在大气层空间上的压力函数、温度函数等等。17 世纪通过用微分表达变化，与用积分表达积累，又创立了研究函数的变化与积累的微积分方法，使数学得到了一个认识自然的有力武器，面目为之一新。自然界的规律往往表现为某些物理量之间的变化与积累的相互制约关系，在数学形式上，则表现为定义在某些空间上的函数间的微积分方程。举例来说，所谓气象预报，无非是根据过去一段时期，对各地压力、温度、降雨量等等的实测数据，以及表达气象变化规律的这些函数间的微分方程，用数学方法推算出今后一段时期内的这些函数数值，以预报气象特征而已。这种帮助认识自然，进而改造自然的普遍而有力的数学方法，使相应的一些数学分支，如函数论、微分方程、数学分析等成为三百多年来数学发展的主流，构成了庞大的分析一类数学，并于要解决有关问题，而促使一些新的数学分支，如微分几何学、拓扑学、泛函分析、计算数学等的出现与迅速成长。

形与数这两者并不是互相割裂的，早在产生数学的萌芽时

期，就通过长度、面积与体积的量度而把形与数联系了起来。我国宋元时期更系统地引进了几何代数化的方法，把一些几何特征用代数式来表达，几何关系则表达为代数式间的代数关系，成为解析几何的先驱，使空间形式的研究归结为较成熟也容易驾驭得多的数量关系的研究。在近代的数学中，这个方法原则也一直在使用着。例如，在拓扑学中，通过引进一些数（如贝蒂数）或代数系统（如同调群，同伦群等）来表达拓扑空间的连续性与连通性，然后用代数方法对这些数与代数系统进行分析而获得拓扑空间几何性质方面的信息。依据这种思想，在 19 世纪末开始建立起来的代数拓扑学，成为拓扑学中最有活力的分支，在本世纪中有着极大的发展，对整个数学也有不小的影响。

不仅几何学由于代数化而获得了有力的武器，而且代数学（以及分析学）也往往由于借用了几何术语，运用几何类比而得到了新的生命力，促进了它们的发展。例如，早在 18 世纪中，法国数学家拉格朗日就把时间因素作为与三个空间坐标并列的第四个坐标而引入了四维空间，推动了力学的研究。同样，力学家与物理学家往往把各种物理参数作为不同坐标而引进了高维的相空间等概念，使几何方法得以在物理学中发挥作用。现代的相对论，即在这种方法下与四维时空流形的几何学研究不可分离。现代数学中还有一个常用的方法，即把一个函数看作一个个“点”，而把某类函数的全体看作一个“空间”，函数间的相异程度看作“点”之间的“距离”，由此得到了各种无穷维的函数空间。一个微分积分方程组的求解，往往归结为求相应函数空间中一个几何变换的不动点问题。这样，不仅分析的问题具有了几何“直观”的意义，而且可以运用近代几何拓扑，以至抽象代数学的有力方法。由此在分析类数学中产生了泛函分析这一活跃的分支，在现代自然科学甚至工程

技术的应用中起着极其重要的作用。

数学发展中的边缘学科

几何、代数与分析等类的学科构成了数学的本体与核心。随着数学本身的发展，以及科学技术与生产实践对数学的新的要求，在这一核心的周围又形成了许多外围学科与边缘学科。例如，客观世界中大量存在的随机现象的研究自 18 世纪以至近代逐渐形成了概率论、随机过程论与数理统计等随机类学科。近几十年来，由于现代生产与国防建设的需要，对资源、设备和条件的合理使用与统筹规划，形成了优选学、规划论、对策论、排队论等运筹类学科。现代大工业要求对工程系统的操作能更可靠与更经济，并能自动控制，特别是由于航天技术等，对控制系统高精度的要求，出现了一门介于数学和工程之间的边缘学科控制论。工程乃至生物中各种复杂的信息传递的研究，推动了边缘学科信息论的诞生和发展。大量应用数学问题的解决，最终需要取得有一定精确度的数据而出现了各种具体的计算理论与计算方法，由此促进了计算数学的发展并产生了一门数学——计算机科学的边缘学科。数学与各种科学的相互渗透又出现了物理数学、生物数学与经济数学等交叉学科。此外，数学各基础学科间的相互渗透也在数学核心内部产生了各种综合性学科。例如，流形上几何、拓扑与微分方程的综合研究，形成了一门新的分支“大范围分析”，随机函数的微分方程论研究，又产生了概率论与分析学的综合性学科“随机微分方程论。”象这一类的综合性学科正在不断涌现。

另一面，17 世纪以来由于解析几何与微积分这种强有力的新工具的出现，数学家们忙于应用这些工具解决科学与技术中的一大堆问题，并为新方法的成功所陶醉，对于所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，未遑遐顾。到了 19 世纪，数学

家们已越来越感到谬误与正确杂陈的局面之无法容忍，许多概念必须澄清，数学也必须置于严密基础之上。在这种形势下，从 19 世纪中叶以来，主要在一些德国数学家的倡导之下，对数学进行了一场批判性的检查运动。这场运动不仅使数学奠定了严实的基础，并产生了公理化方法，以及一些集合论、实变函数论、点集拓扑学、抽象代数学等新颖学科。特别是，数学推理本身的分析与形式化产生了一门影响巨大的学科“数理逻辑”。

此外，数学史料的征集与整理也被重视起来，出现了一些篇幅巨大的数学史著作。近年来，数学史已进入了对数学思想与方法的历史演变和分析批判的研究阶段。对中国古代的数学过去或付阙如、或多歪曲的情况，也已受到了重视，开始走上了正确理解与分析的时期。我国的数学工作者们，应该责无旁贷，把对我国数学史的研究重任担当起来。

这样，以几何、代数、分析等类学科为核心，以及围绕此核心周围的形形色色的许多学科错综复杂地交织在一起成为数学王国的一幅宏大而绚丽的蓝图。

数学学科的盛衰兴替

当然，学科并不是一成不变的。随着时间的推移，新的学科不断产生，旧的学科却有时不免销声匿迹默默无闻。绵亘于整个 19 世纪的投影几何学，由于基本上已搞清楚而被作为档案搁置在图书馆的书架上。在本世纪 20 年代盛极一时的射影微分几何学，则由于后来发现意义不如预期而受到了冷落。在 19 世纪对代数与几何都极重要的不变式论这一学科，则其盛衰兴替已有几起几落。某些学科，如代数几何学，其面貌又经常在改变之中，诸家学说纷纭，从未获得定型。另一面，某些 18、19 世纪，甚至更悠久且已消逝的理论，却又重新被发掘

出来，在新的观点、新的方法之下，成为现代数学中很活跃的研究课题。例如，一门作为微积分最早应用的古老学科“变分法”，本来消沉已久，近一、二十年来，却以另一种控制论的新面目，出现在技术领域中显得十分活跃。这两三百年来不少经典著作，也被重新翻印和钻研之中。

然而，不管数学各个学科经历着怎样的分、合、改、变，也不管数学内部如何奔腾澎湃，数学王国的疆土总是在不断扩张之中，而且始终是由形与数两大基本概念所统治之下的“世袭”领土。伟大的革命导师恩格斯对数学所作出的“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”的这一精辟刻划不仅是对数学过去的总结，也是对数学现状的忠实描绘，又是对数学未来发展的指导与准绳。

二、数学发展的未来

展望未来，数学科学丰富多彩的广阔天地之日新月异，似乎使数学不得不分成许多日益庞杂的分支，各分支间的联系，也有日益削弱的趋势。许多专门家们往往只能偏处一隅之地，彼此很难相互了解。然而这只是数学发展过程中的现象，也只是事物的一个方面，随着数学的不断前进，也必然会不断出现更锐利的工具与更简单的方法，使数学不断更新，删繁就简，去粗存精。在历史上，原来只能用天才式的艰难推理才能从事的初等几何学，通过我国宋元时代的几何代数化，与17世纪时的解析几何，已变得平淡无奇。从有史以来直到17世纪包括解析几何与微积分为止的全部数学，不论岁月如何漫长，卷帙如何浩繁，内容如何丰富，基本上都已（或应已）压缩在十来年的中小学教科书中。这种现象也正在重复。

为了要使庞大的数学知识变得简而且精，数学家们经常依据数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部分的新观点新

方法来。例如，在 19 世纪后期，德国厄兰格的数学家克莱因提出用“群”的观点来统一当时杂乱的几何学的方案，迄今称为厄兰格计划。本世纪 20 年代，美国伯克霍夫又提出了“格”的概念，以统一代数系统的各种理论与方法。上一世纪与本世纪之交，出现了公理化运动，以公理系统作为数学统一的基础。本世纪 30 年代，法国的一个数学学派布尔巴基，除了继承了公理化运动以外，又提出了结构概念，把数学的核心部分在这概念之下统一成一个整体，而依研究结构的异同来划分成不同领域。与此大约同时，美国麦克莱恩与艾伦伯格又提出范畴与函子理论，数学的分门别类即以研究所属范畴为依据，以此作为统一数学的基础。总之，各种不同学派，根据他们对数学的不同认识，提出了多种多样统一数学，以建立数学体系的不同方案来，其终极目的则大体上是相同的。或许将来会出现一种新观点、新方法、新理论，把目前的数学统一起来。但是，这种统一不是绝对的、静止不变的，而是暂时的、相对的，对立的斗争则是绝对的。随着科学技术的不断发展和深入，以及各学科之间的相互渗透，将对数学提出大量的千差万异的新课题，使数学研究得更深入。这些问题的解决，反过来又促使数学更进一步发展。

对于数学未来发展具有决定性影响的一个不可估量的方面是计算机对数学带来的冲击。在不久的将来，电子计算机之于数学家，势将与显微镜之于生物学家，望远镜之于天文学家那样不可或缺。现在的计算机通过小型化而成为每个数学家的“囊中之物”，这一设想势将成为现实，数学家们对这些前景必须有着足够的思想准备。

除了一些人所共知的作用外，计算机还提供了一个有力工具使数学有可能象其它自然科学一样，跻身于科学实验的行列。19 世纪的数学家高斯，为了要发现整数性质的规律性，

首先对各种特殊情况做大量艰苦的计算工作以为试探。高斯关于整数论的一些著名定理，用他自己的话来说，就是通过这种“系统尝试法”而发现的。现在这种手工业式的系统尝试可以用电子计算机来代替了。美国数学家乌拉，为了要探讨应用中广泛出现，而现代数学又显得还无能为力的非线性现象，在电子计算机上进行试验，发现了一些规律，近几年来，在应用数学上的一个重大突破（所谓微分方程孤立子解的获得），就是首先在计算机的荧光屏上发现的。

计算机对数学的另一个重大作用乃是对数学研究作为脑力劳动在方式上带来的革新。数学，不论是学习还是创新，最耗时费力的劳动，往往消耗在定理的证明上，而不是在真理的发明、发现上。事实上，一个定理即使对其证明在逻辑上经历了严格细致的逐步检验也无非是说明知道定理正确无误而已，还不足说明真正“懂得”了这个定理。自然，证明是完全必要的，证明的严密性也是完全必需的，但更重要的应是定理之为何发明，如何发明，起何作用等这一类问题。电子计算机已使人们从烦琐复杂而又十分单调的加减乘除的劳动中解放出来。某些数学定理的证明，完全可以借助于电子计算机来完成。事实上，某些或某类定理的证明，可以避免通常虽简美但奥秘因而颇为艰难的方式，而采用虽烦琐但刻板因而较为容易的方式。换言之，即使质的困难转化成量的复杂，而后者对于电子计算机来说是轻而易举的，因而得以使定理证明化难为易。这样电子计算机就可以使人们从某些逻辑推理的脑力劳动中解放出来。因而使数学家得以把聪明才智更多地用到真正创造性的工作上去，这是当前数学发展中值得也是应该认真考虑的问题。

我国的数学有着悠久的历史与优良的传统，本来位于世界的先列，只是近几百年来才落后了。